2022-2023学年秋季学期

# 第二部分
# 逻辑代数基础

授课团队：宋威

助　　教：马浩

# 逻辑代数

在数字电路中，主要研究的是电路的输入输出之间的逻辑关系，因此数字电路又称逻辑电路，其研究工具是**逻辑代数**，即离散数学中的**布尔逻辑（Boolean Logic）**。

电路的输入、输出和中间信号状态用**逻辑变量**表示，一般书写为一个英文字母，取值0或1（一位逻辑变量），表示逻辑变量的状态为 低/高（无效/有效）。

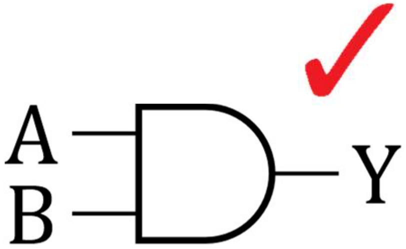
逻辑代数是逻辑变量的运算规则。

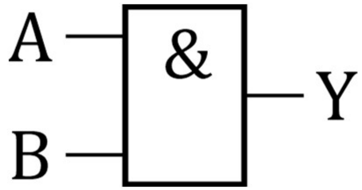
逻辑代数和离算数学中的集合运算与逻辑推理联系紧密。

# 逻辑代数的三种基本运算-逻辑与

- 定义
  - 当全部条件同时满足时，结果才发生。

    每个人都有苹果 ⇒ 所有人都有苹果
- 表达方式
  - 图形符号




  - 真值表

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

  - 运算符号

$Y = A \cdot B$或者 $\boldsymbol{Y = AB}$

  - 代码符号（Verilog HDL）

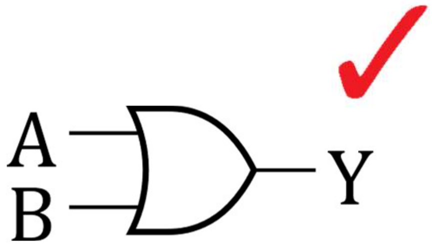
Y = A&B

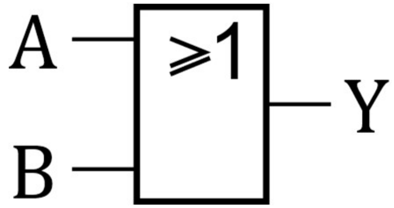
# 逻辑代数的三种基本运算-逻辑或

- **定义**
  - **当多个条件种有任何一个满足时，结果就发生。**

    有一个人有苹果 ⇒ 有人有苹果

- **表达方式**
  - **图形符号**




  - **真值表**

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

  - **运算符号**

$$Y = A + B$$

  - **代码符号（Verilog HDL）**

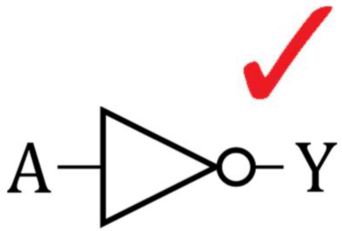
$$\mathrm{Y} = \mathrm{A}|\mathrm{B}$$

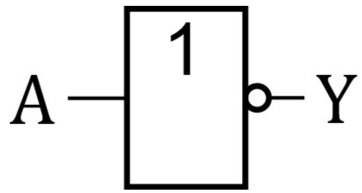
# 逻辑代数的三种基本运算-逻辑非

- **定义**
  - **当条件满足时，结果不发生，反而则发生。**

    你有苹果 ⇒ “你没有苹果”为假

- **表达方式**
  - **图形符号**




  - **真值表**

| A | Y |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

  - **运算符号**

$Y = \bar{A}$ 或者 $Y = A'$ （不推荐，和对偶、转置，时延混淆）

  - **代码符号（Verilog HDL）**

Y = ~A

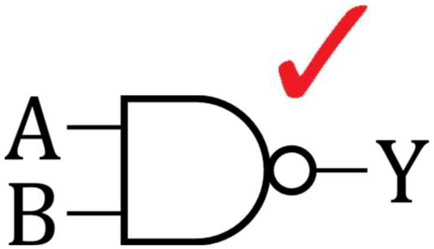
# 四种常见逻辑运算-与非

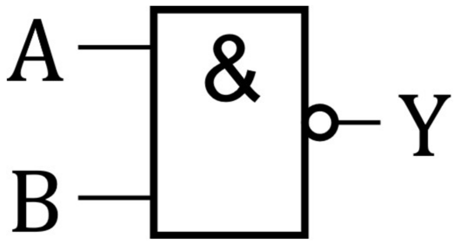
## 定义

$$Y = \overline{A \cdot B} \text{ 或者 } Y = \overline{AB}$$ ✓

## 表达式方式

### 图形符号




### 真值表

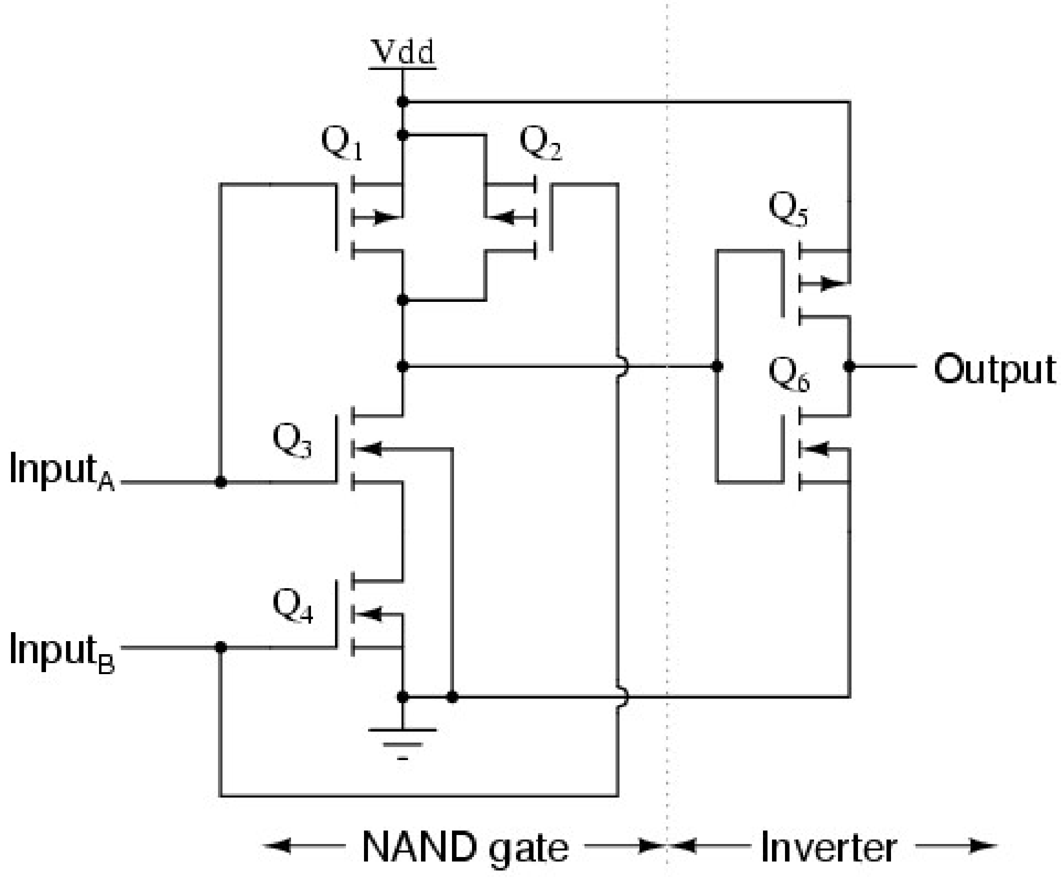
| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

### 代码符号（Verilog HDL）

Y = ~(A&B)

# 为什么要讨论 与非

CMOS AND gate




与门（与逻辑在CMOS电路的实现）是：与非门+非门，**与非门的实现更简单**。

$$Y = AB = \overline{(\overline{AB})}$$

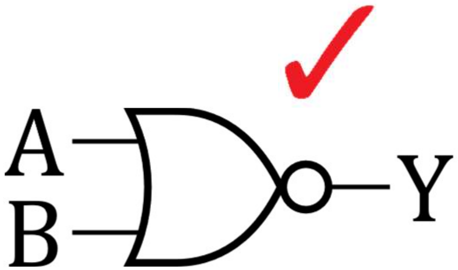
# 四种常见逻辑运算-或非

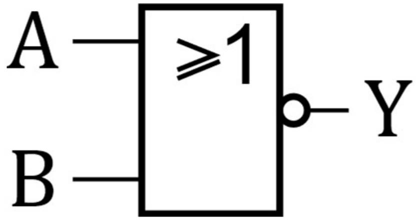
## ❍定义

$$Y = \overline{A + B}$$

## ❍表达方式

### ❍图形符号




### ❍真值表

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

### ❍代码符号（Verilog HDL）

Y = ~(A|B)

# 四种常见逻辑运算-异或

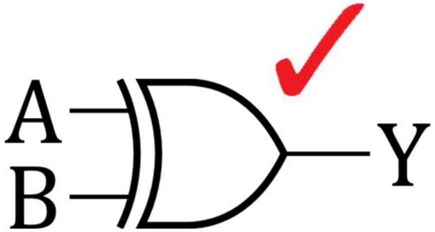
## 定义

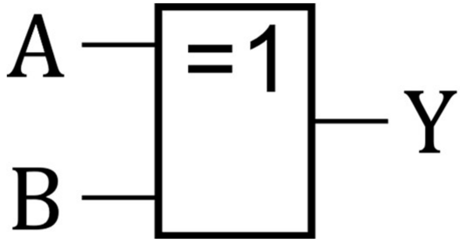
$$\boldsymbol{Y = A \oplus B}$$

$$Y = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$$

## 表达式

### 图形符号




### 真值表

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

### 代码符号（Verilog HDL）

Y = A^B

# 四种常见逻辑运算-同或

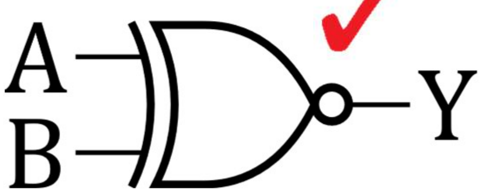
## 定义

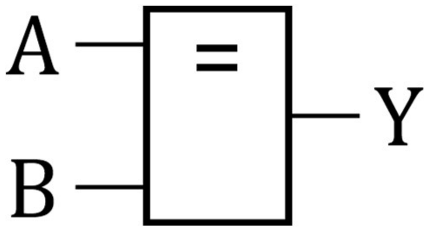
$$Y = A \odot B \text{ 或者 } \boldsymbol{Y = \overline{A \oplus B}}$$

$$Y = \overline{A \oplus B} = AB + \bar{A}\bar{B}$$

## 表达方式

### 图形符号




### 真值表

| A | B | Y |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

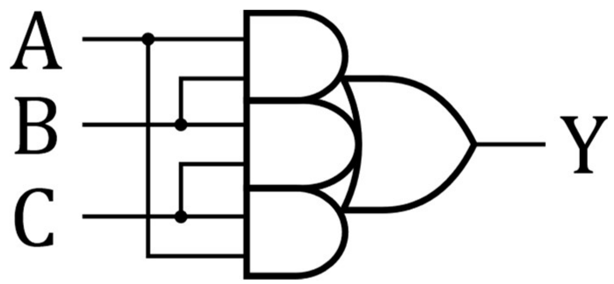
### 代码符号（Verilog HDL）

Y = A~^B 或者 **Y=~(A^B)**

# 更复杂的常用逻辑表达式

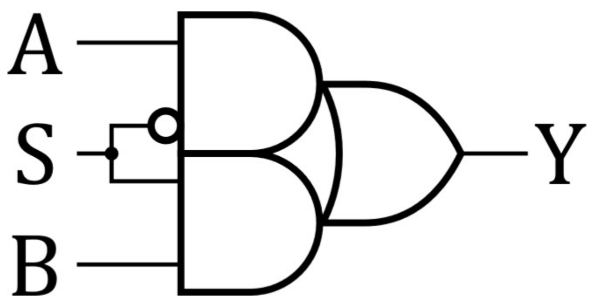
## 投票电路

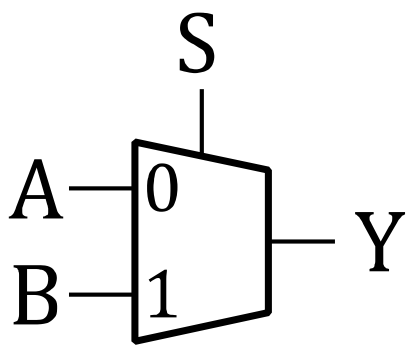
$$Y = AB + AC + BC$$




## 双路选择器

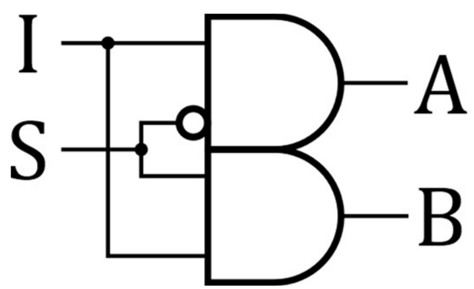
$$Y = A\bar{S} + BS$$

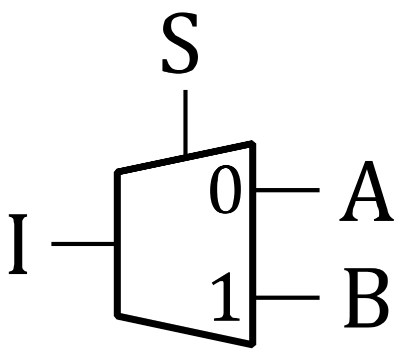



## 双路分用器

$$A = I\bar{S}$$
$$B = IS$$



# 基本逻辑运算总结

一般做逻辑推导时采用逻辑变量和逻辑运算符构成的逻辑表达式进行运算。

- 基本逻辑运算
  - 与：$Y = AB$
  - 或：$Y = A + B$
  - 非：$Y = \overline{A}$

下一步，使用基本逻辑运算，计算更复杂的逻辑运算方程。

- 常见逻辑运算
  - 与非：$Y = \overline{AB}$
  - 或非：$Y = \overline{A + B}$
  - 异或：$Y = A \oplus B$
  - 同或：$Y = \overline{A \oplus B}$

# 常数的逻辑运算

交换并不影响结果

## 基本逻辑运算

- 与：$1 = 1 \cdot 1,\quad 0 = 0 \cdot 1,\quad 0 = 1 \cdot 0,\quad 0 = 0 \cdot 0$
- 或：$1 = 1 + 1,\quad 1 = 0 + 1,\quad 1 = 1 + 0,\quad 0 = 0 + 0$
- 非：$1 = \overline{0},\quad 0 = \overline{1}$

## 常见逻辑运算

- 与非：$0 = \overline{1 \cdot 1},\quad 1 = \overline{0 \cdot 1},\quad 1 = \overline{1 \cdot 0},\quad 1 = \overline{0 \cdot 0}$
- 或非：$0 = \overline{1 + 1},\quad 0 = \overline{0 + 1},\quad 0 = \overline{1 + 0},\quad 1 = \overline{0 + 0}$
- 异或：$0 = 1 \oplus 1,\quad 1 = 0 \oplus 1,\quad 1 = 1 \oplus 0,\quad 0 = 0 \oplus 0$
- 同或：$1 = \overline{1 \oplus 1},\quad 0 = \overline{0 \oplus 1},\quad 0 = \overline{1 \oplus 0},\quad 1 = \overline{0 \oplus 0}$

# 包含常数的逻辑运算

## 基本逻辑运算

- 与：$A = A \cdot 1,\quad A = 1 \cdot A,\quad 0 = A \cdot 0,\quad 0 = 0 \cdot A$
- 或：$1 = A + 1,\quad 1 = 1 + A,\quad A = A + 0,\quad A = 0 + A$

## 常见逻辑运算

- 与非：$\overline{A} = \overline{A \cdot 1},\quad \overline{A} = \overline{1 \cdot A},\quad 1 = \overline{A \cdot 0},\quad 1 = \overline{0 \cdot A}$
- 或非：$0 = \overline{A + 1},\quad 0 = \overline{1 + A},\quad \overline{A} = \overline{A + 0},\quad \overline{A} = \overline{0 + A}$
- 异或：$\overline{A} = A \oplus 1,\quad \overline{A} = 1 \oplus A,\quad A = A \oplus 0,\quad A = 0 \oplus A$
- 同或：$A = \overline{A \oplus 1},\quad A = \overline{1 \oplus A},\quad \overline{A} = \overline{A \oplus 0},\quad \overline{A} = \overline{0 \oplus A}$

# 逻辑运算的基本定律

- 交换律： $A+B=B+A \qquad A\cdot B=B\cdot A$
- 结合律： $A+(B+C)=(A+B)+C$

  $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
- 分配律： $A(B+C)=AB+AC$

  $A+BC=(A+B)\cdot(A+C)$
- 互补律： $A\cdot\overline{A}=0 \qquad A+\overline{A}=1$
- 重叠律： $A\cdot A=A \qquad A+A=A$
- 否定律： $\overline{(\overline{A})}=A$
- 反演律： $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

  $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$ 真值表证明
- 反演律也称为De.Morgan定律

# 常用公式的证明

- $A + AB = A$ $\qquad 1 + B = 1$
- $A + \bar{A}B = A + B$
- $AB + A\bar{B} = A$ $\qquad B + \bar{B} = 1$
- $A(A + B) = A$
- $AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C$
- $AB + \bar{A}C + BCD = AB + \bar{A}C$
- $A \cdot \overline{AB} = A\bar{B}$
- $\bar{A} \cdot \overline{AB} = \bar{A}$

# 逻辑计算和普通计算的差别

- 逻辑代数中不会出现指数或者系数
  - $A \cdot A \neq A^2$
  - $A + A \neq 2A$
- 逻辑代数中没有减法和除法
  - 不能将等式

$$A(A+B) = A$$

两边同时除以$A$得到

$$A + B = 1$$

  - 也不能在

$$A + \bar{A}B = A + B$$

两边同时减去$A$得到

$$\bar{A}B = B$$

# 逻辑代数的基本定理—代入定理

- **代入定理：**

  任何一个含有变量A的等式，如果将所有出现A的位置都用同一个逻辑函数代替，则等式仍然成立。

- **推广反演率**

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

  - 用$CD$代替$B$:

$$\overline{A(CD)} = \overline{A} + \overline{CD} = \overline{A} + \overline{C} + \overline{D}$$

  - 更换字母得到

$$\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

- **证明**
  - $B$作为一个逻辑变量可以是任何值，将$B$换做$CD$可以看作是对$B$的一个赋值，自然等式仍然成立。

# 逻辑代数的基本定理—反演定理

## 反演定理：

**对于任何一个逻辑表达式$Y$，如果将表达式中的所有“·”换成“+”，“+”换成“·”，“0”换成“1”，“1”换成“0”，原变量换成反变量，反变量换成原变量，那么所得到的表达式就是函数$Y$的反函数$\overline{Y}$（或称补函数）。**

- **注意：**
  - 仍然遵守先括号，然后乘，最后加的运算次序
  - 不属于单个变量的反号不变

## 例子：已知$Y = A(B + C) + CD$ 求 $\overline{Y}$

$$\overline{Y} = \left(\overline{A} + (\overline{B} \cdot \overline{C})\right) \cdot (\overline{C} + \overline{D}) = \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{D}$$

- **当然，我们也可以用传统做法：**

$$\overline{Y} = \overline{A(B + C) + CD} = \overline{A(B + C)} \cdot \overline{CD} = (\overline{A} + \overline{B}\,\overline{C})(\overline{C} + \overline{D})$$

$$= \overline{A}\,\overline{C} + \overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{D}$$

# 逻辑代数的基本定理—反演定理证明（附加）

## 反演定理的证明

**我们可以将所有的逻辑表达式看成下面的3种形式之一：**

- $Y=\overline{A}$
- $Y=A+B$
- $Y=A\cdot B$

**其中$A$和$B$都是逻辑表达式，可以被任意代入。那么，证明反演定理，即证明：**

- $Y=\overline{A}\rightarrow\overline{Y}=A$
- $Y=A+B\rightarrow\overline{Y}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
- $Y=A\cdot B\rightarrow\overline{Y}=\overline{A}+\overline{B}$

**而这些是容易证明的。**

**实际上，我们也可以证明：**$Y=A\oplus B\rightarrow\overline{Y}=\overline{A}\odot\overline{B}=\overline{\overline{A}\oplus\overline{B}}$

**所以，反演定理也适用异或/同或。**

板书证明

# 逻辑代数的基本定理—对偶定理

- **对偶定理：**

  **对于任何一个逻辑表达式$Y$，如果将表达式中的所有“·”换成“+”，“+”换成“·”，“0”换成“1”，“1”换成“0”，而变量保持不变，则可得到的一个新的函数表达式 $Y^D$, $Y^D$称为$Y$的对偶式。如果两个逻辑式相等，则它们的对偶式也相等。**

  有的地方，对偶式$Y^D$也被记作$Y'$，所以我们不推荐使用$Y'$代表$\bar{Y}$。
  另外，大部分情况下，$Y^D \neq \bar{Y}$。

  **注意：**

  - 仍然遵守先括号、然后乘、最后加的运算次序

- **例子：证明**$A + BC = (A + B)(A + C)$

  **上面等式的对偶式为：**

  $$A(B + C) = AB + AC$$

  **显然该等式是成立的，所以原等式成立。**

# 逻辑代数的基本定理—对偶定理证明（附加）

## 对偶定理的证明

对于一个等式

$$Y_l = Y_r$$

我们可以假设等式由一系列逻辑变量集合$\mathbb{A} = \{A_i, i \in \mathbb{N}\}$构成

那么，我们知道

$$\overline{Y_l} = \overline{Y_r}$$

根据反演定理，我们可以得到由集合$\overline{\mathbb{A}} = \{\overline{A}_i, i \in \mathbb{N}\}$构成的等式

如果我们对每个变量进行重写：$\overline{A_i} \to A_i$

我们就得到了对偶等式。

$$A(B+C) = AB + AC$$

左右同时取反，并反演：

$$\overline{A} + \overline{B}\overline{C} = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$$

变量替换：$a = \overline{A}, b = \overline{B}, c = \overline{C}$

$$a + bc = (a+b)(a+c)$$

# 逻辑代数基本公式和定理总结

逻辑代数的最基本定律、常数运算需要熟记，其证明一般使用真值表穷举。

逻辑代数的基本定理：

- 代入定理：用更复杂的表达式代替逻辑变量
- 反演定理：反演率到普通表达式的推广
- 对偶定理：对偶等式间的互证关系

反演率是复杂证明和推导的关键，经常使用。

# 逻辑函数以及其描述形式

**逻辑函数：**

$$Y = F(A, B, C, \dots)$$

**以逻辑变量$A, B, C, \dots$为输入，进行逻辑运算，得到输出$Y$的逻辑关系。**

**逻辑函数的描述方式：**

- **真值表**
- **函数表达式**
- **逻辑图（门级电路图，schematic）**
- **波形图**
- **其他：卡诺图、网表、RTL HDL等等**

# 真值表

| A | B | C | Y |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$Y = F(A, B, C)$$

# 逻辑函数表达式

| A | B | C | Y |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$Y = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

$$Y = \overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C}$$

# 逻辑函数表达式化简与电路图

$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

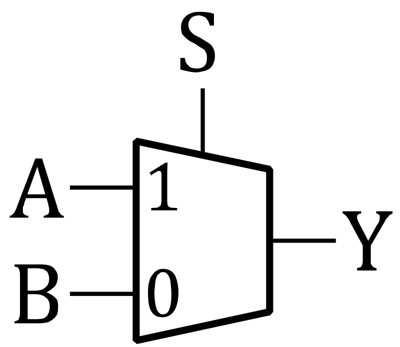
$$Y = (\overline{A}B + AB)C + (A\overline{B} + AB)\overline{C}$$

$$Y = BC + A\overline{C}$$

替换 $C \rightarrow \overline{S}$

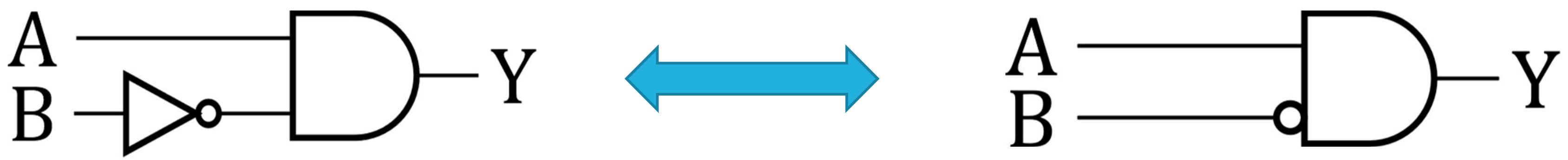
$$Y = \overline{S}B + SA$$

这其实是一个双路选择器：



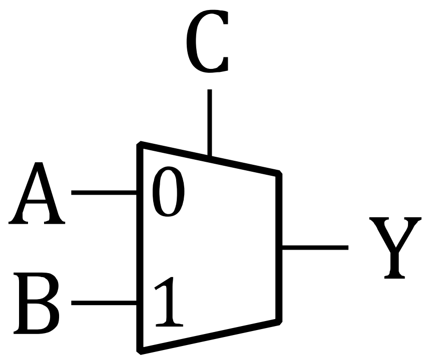
# 真值表、表达式和电路图的转换

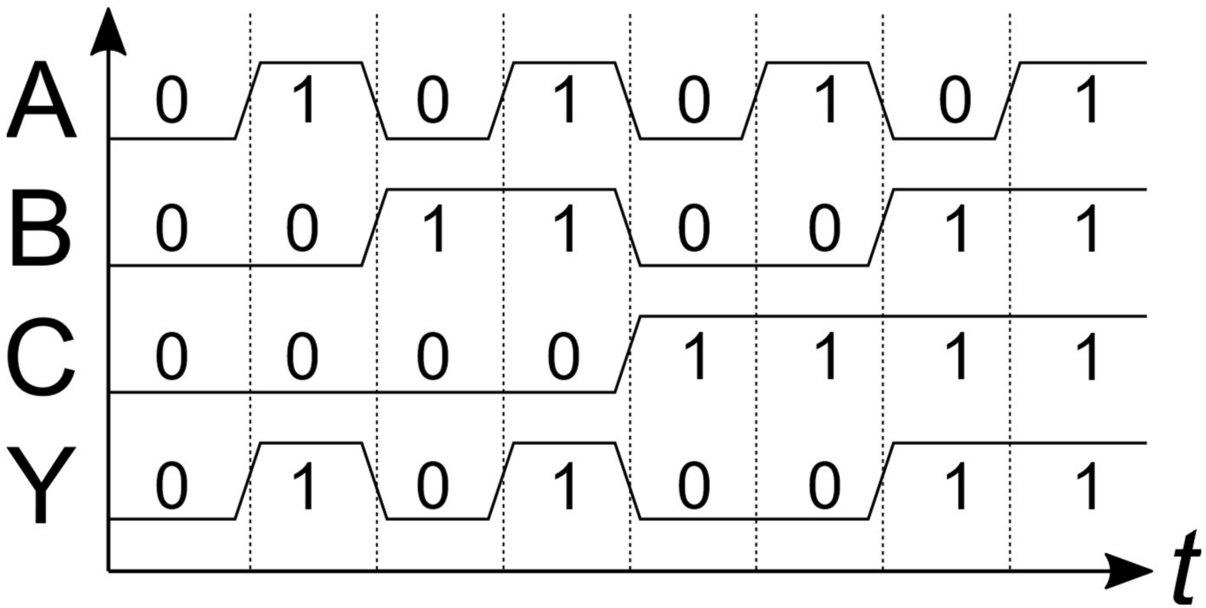
- 真值表
  - 当确定输入和输出变量的顺序时，是唯一的
  - 因为真值表是逻辑函数的穷举
- 表达式
  - 表达式并不唯一
  - 但是表达式之间是等价的
  - 真值表可以和多个表达式等价
- 电路图
  - 任何一个表达式可以和一个或者多个电路图等价
  - 但总的来说，表达式和电路图是可以一一互换的



# 波形图

| A | B | C | Y |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |




波形图反映了输入在不同时刻时的变化导致输出的变化。

- 能够比较好的描述协议和电路交互
- 不一定能完整反映电路的行为。

# 逻辑函数的标准形式

- 标准形式，有时候也称为范式。
  - 范式：norm form, canonical form
  - 一个逻辑函数的某一种范式是唯一的（不讨论顺序）
  - 如果两个逻辑函数的范式相等，两个逻辑函数等价（证明）
  - 范式所用的逻辑符号种类较少（硬件实现）
- 范式类型
  - 最小项标准式（合取范式，CNF）
  - 最大项标准式（析取范式，DNF）
  - INF：If-then-else Norm Form (附加)

# 最小项标准形式

- **最小项：**

  在$n$变量逻辑函数中，若$m$为包含$n$个因子的乘积项，而且这$n$个变量都以原变量或反变量的形式在$m$ 中出现，且仅出现一次，则这个乘积项$m$称为该函数的一个标准积项，通常称为最小项。

- **最小项的个数：**

  对于$n$变量逻辑函数，最小项的个数为$2^n$。

$$Y = BC + A\overline{C}$$

**最小项标准形式：**

$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

- 对于任意一个最小项，只有一组变量的取值使它的值为1，而当变量取其它各组值时，该最小项的值都是0。
- 任意两个最小项的乘积恒为0。
- 全体最小项之和为1。

# 最小项标准形式的计算—真值表法

$$Y = BC + A\overline{C}$$

| 最小项 | A | B | C | Y |
|---|---|---|---|---|
| $m_0$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m_1$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $m_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $m_3$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $m_4$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $m_5$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $m_6$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $m_7$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$Y = m_3 + m_4 + m_6 + m_7$$

$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

# 最小项标准形式的计算—表达式展开

$$Y = BC + A\overline{C}$$

$$Y = (\overline{A} + A)BC + A(\overline{B} + B)\overline{C}$$

$$Y = \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + AB\overline{C} + ABC$$

# 最大项标准形式

- **最大项：**

  在$n$变量逻辑函数中，若$M$为包含$n$个因子的和，而且这$n$个变量都以原变量或反变量的形式在$M$ 中出现，且仅出现一次，则项$M$称为该函数的一个最大项。

- **最大项的个数：**

  对于$n$变量逻辑函数，最大项的个数为$2^n$。

$$Y = BC + A\overline{C}$$

**最大项标准形式：**

$$Y = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$$

- 对于任意一个最大项，只有一组变量的取值使它的值为0，而当变量取其它各组值时，该最大项的值都是1。
- 任意两个最大项的和恒为1。
- 全体最大项之积为0。

# 最大项标准形式的计算—真值表法

$$Y = BC + A\overline{C}$$

| 最大项 | 最大项 | A | B | C | Y |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_0$ | $A+B+C$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $M_1$ | $A+B+\bar{C}$ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $M_2$ | $A+\bar{B}+C$ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $M_3$ | $A+\bar{B}+\bar{C}$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $M_4$ | $\bar{A}+B+C$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $M_5$ | $\bar{A}+B+\bar{C}$ | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $M_6$ | $\bar{A}+\bar{B}+C$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $M_7$ | $\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$ | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$Y = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_5$$

$$Y = (A+B+C)(A+B+\overline{C})(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

# 最大项标准形式的计算—表达式展开

$$Y = BC + A\overline{C}$$

$$Y = (B + A\overline{C})(C + A\overline{C})$$

$$Y = (B + A)(B + \overline{C})(C + A)$$

$$Y = (B + A + C)(B + A + \overline{C})(B + \overline{C} + A)(B + \overline{C} + \overline{A})(C + A + \overline{B})(C + A + B)$$

$$Y = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$$

# 最大项标准形式的计算—求反最小标准式

$$Y = BC + A\overline{C}$$

$$\overline{Y} = \overline{BC + A\overline{C}}$$
$$\overline{Y} = \overline{BC} \cdot \overline{A\overline{C}}$$
$$\overline{Y} = (\overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + C)$$
$$\overline{Y} = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}\overline{C} + \overline{B}C$$
$$\overline{Y} = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C$$

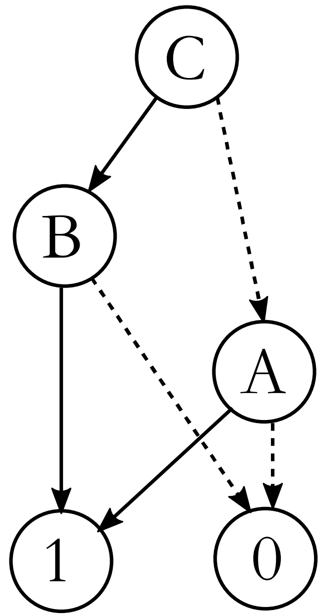
$$Y = \overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C}$$
$$Y = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C})$$

# INF: If-Then-Else Norm Form (附加)

- ITE(if-then-else)算子：
  - $Y = x \cdot Y_x + \overline{x} \cdot Y_{\overline{x}} = ite(x, Y_x, Y_{\overline{x}})$
  - $Y_x$: 当$x = 1$时，$Y$的残余项
  - $Y_{\overline{x}}$: 当$x = 0$时，$Y$的残余项

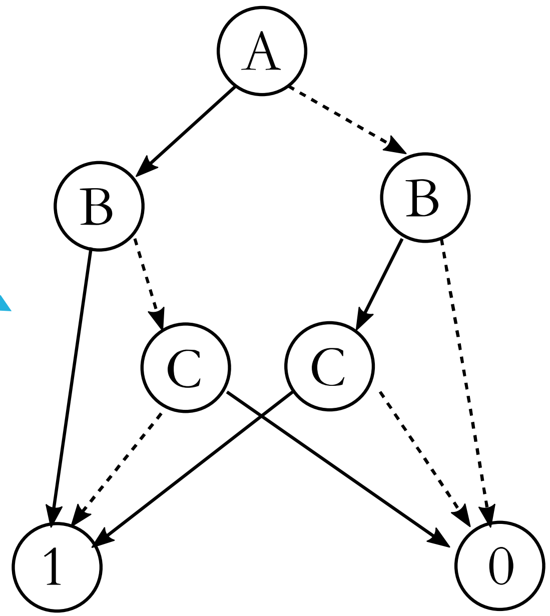
$Y = BC + A\overline{C}$

$Y = ite(C, B, A)$




- 当确定$x$的次序时，INF是唯一的。
  不同次序的范式不一样

$Y = ite(A, ite(B, 1, \overline{C}), ite(B, C, 0))$




- BDD: binary decision diagram

# 范式总结

- 标准形式，有时候也称为范式。
  - 范式：norm form, canonical form
  - 一个逻辑函数得某一种范式是唯一的（不讨论顺序）
  - 如果两个逻辑函数的范式相等，两个逻辑函数等价（证明）
  - 范式所用的逻辑符号种类较少（硬件实现）

- 范式类型
  - 最小项标准式（合取范式，CNF）
  - 最大项标准式（析取范式，DNF）
  - INF：If-then-else Norm Form

代数化简法——就是反复运用基本公式和常用公式消去多余项和多余因子，以便求得最简表达式。

（1）. 并项法： → 利用互补律：$A+\overline{A}=1$

例如 $AB\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}=(A+\overline{A})B\overline{C}=B\overline{C}$

（2）. 吸收法： → 利用吸收规则：$A+AB=A$

例如 $A\overline{C}+AB\overline{C}D(E+F)=A\overline{C}$

# 逻辑函数的代数化简法（from BIT)

（3）. 消去法：

利用吸收规则：$A+\overline{A}B = A+B$

例如　$A+\overline{A}BC+\overline{B} = A+\overline{B}+C$

（4）. 配项法：　利用互补律：$A+\overline{A} = 1$

利用重叠律：$A+A = A$，　$A\cdot A=A$

利用01律：$1+A = 1$

例如　$\overline{A}B+A\overline{B}+AB = \overline{A}B+AB+A\overline{B}+AB$

$(\overline{A}+A)B + (\overline{B}+B)A = B+A$

**特点：**　<u>*对变量的个数无限制*</u>

# 代数化简例子（from BIT）

化简 $Y=ABC+ABD+\bar{A}B\bar{C}+CD+B\bar{D}$

（例如）

$$=ABC+\bar{A}B\bar{C}+CD+B(AD+\bar{D})$$

$$=ABC+\bar{A}B\bar{C}+CD+B(A+\bar{D})$$

$$=ABC+\bar{A}B\bar{C}+CD+BA+B\bar{D}$$

$$=AB+\bar{A}B\bar{C}+CD+B\bar{D}$$

$$=B(A+\bar{A}\bar{C})+CD+B\bar{D}$$

$$=B(A+\bar{C})+CD+B\bar{D}$$

$$=BA+B\bar{C}+CD+B\bar{D}\quad=BA+B(\bar{C}+\bar{D})+CD$$

$$=BA+B\overline{CD}+CD=BA+B+CD$$

$$=B(A+1)+CD=B+CD$$

## 卡诺图

**将n变量的全部最小项各用一个小方块表示，并使具有逻辑相邻性的最小项在几何位置上相邻排列，得到的图形叫做n变量最小项的卡诺图。**

$Y = BC + A\overline{C}$

| | | BC | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 00 | 01 | 11 | 10 |
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

$Y = A + BC + \overline{B}D$

| | | CD | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 00 | 01 | 11 | 10 |
| AB | 00 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 01 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# 利用卡诺图获得最小表达式

$$Y = ABC + ABD + \bar{A}B\bar{C} + CD + B\bar{D}$$

| | | CD | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 00 | 01 | 11 | 10 |
| AB | 00 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 10 | 0 | 0 | 1 | 0 |

$$Y = B + CD$$

$$Y = A + BC + \bar{B}D$$

| | | CD | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 00 | 01 | 11 | 10 |
| AB | 00 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | 01 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$Y = (A + \bar{B} + C)(A + B + D)$$

$$Y = A + AB + AD + \bar{B}D + AC + CB + CD$$
$$Y = A + \bar{B}D + BC + CD$$
$$Y = A + \bar{B}D + BC + (\bar{B} + B)CD$$
$$Y = A + \bar{B}(D + CD) + B(C + CD)$$
$$Y = A + \bar{B}D + BC$$

# 将表达式化简成由特定门构成的电路（附加）

## ❍与非电路

- ❍所有的逻辑表达式都可以转化为只用与非门（二输入与非门）实现的电路（不唯一）。

$$Y = A + BC + \bar{B}D$$

$$Y = \overline{\bar{A} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{\overline{\bar{B}D}}}$$ 与非门+反门

$$Y = \overline{\overline{A \cdot 1} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{\overline{\overline{B \cdot 1} \cdot D}}}$$ 与非门

$$Y = \overline{\overline{A + BC} \cdot \overline{\overline{\overline{B \cdot 1} \cdot D}}}$$

$$Y = \overline{\overline{\overline{\bar{A} \cdot \overline{BC}}} \cdot \overline{\overline{B \cdot 1} \cdot D}}$$

$$Y = \overline{\overline{\overline{\overline{A \cdot 1} \cdot \overline{BC}} \cdot 1} \cdot \overline{\overline{B \cdot 1} \cdot D}}$$ 二输入与非门

## ❍或非电路

- ❍所有的逻辑表达式都可以转化为只用或非门（二输入或非门）实现的电路（不唯一）。

$$Y = A + BC + \overline{B}D$$

$$Y = \overline{\overline{A + BC + \overline{B}D}}$$

$$Y = \overline{\overline{A + \overline{\overline{B} + \overline{C}} + \overline{B + \overline{D}}} + 0}$$ 或非与反门

$$Y = \overline{\overline{A + \overline{\overline{B + 0} + \overline{C + 0}} + \overline{B + \overline{D + 0}}} + 0}$$ 或非

利用：$\overline{a + b + c} \rightarrow \overline{\overline{\overline{a + b} + 0} + c}$

$$Y = \overline{\overline{A + \overline{\overline{\overline{\overline{B + 0} + \overline{C + 0}} + \overline{B + \overline{D + 0}}} + 0}} + 0}$$ 二输入或非门

# 逻辑化简总结

- 直接做代数化简
  - 并项
  - 吸收和消去
  - 配项
- 卡诺图化简
  - 直接获得最小表达式
  - 利用卡诺图证明两个表达式等价
  - 空间爆炸（比真值表稍好）
- 化简成某种特殊形式（附加）
  - 与非
  - 或非
  - 由与非门/或非门可以构成任意（组合）逻辑
    - 可编程逻辑电路的理论基础

# 具有无关项的逻辑函数及其化简

## 约束条件

在前面的逻辑函数化简中，我们假设所有的输入变量都是相互独立的逻辑变量，因此可以取任意值。然而，在实际电路中，一个电路的输入可能是其他电路的输出，逻辑变量之间并非完全独立，存在约束条件。这些约束条件导致某些最小项是不存在的。

## 无关项

我们称这些由于约束条件而导致的不存在的最小项为无关项。

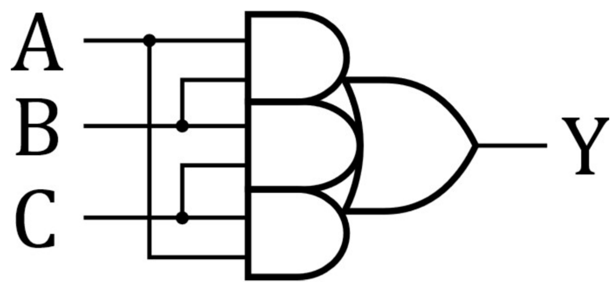
## 无关项化简

利用这些无关项对逻辑函数经行进一步化简能缩小电路的复杂度。

在电路设计当中，任何有效信息应该都能导致电路复杂度的下降。

# 约束条件和无关项示例

投票电路：$Y = AB + AC + BC$




- 假设我们知道，输入$A$和输入$B$总是相反：

$$A = \overline{B}$$

- 那么，我们知道以下的最小项是不存在的（**即无关项**）：

$$ABC, AB\overline{C}, \overline{A}\overline{B}C, \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

- 我们可以得到**约束条件**：

$$ABC + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} = 0$$

- 在该约束条件下，原投票电路可以被描述为：

$$Y = AB + AC + BC + d(ABC + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C})$$

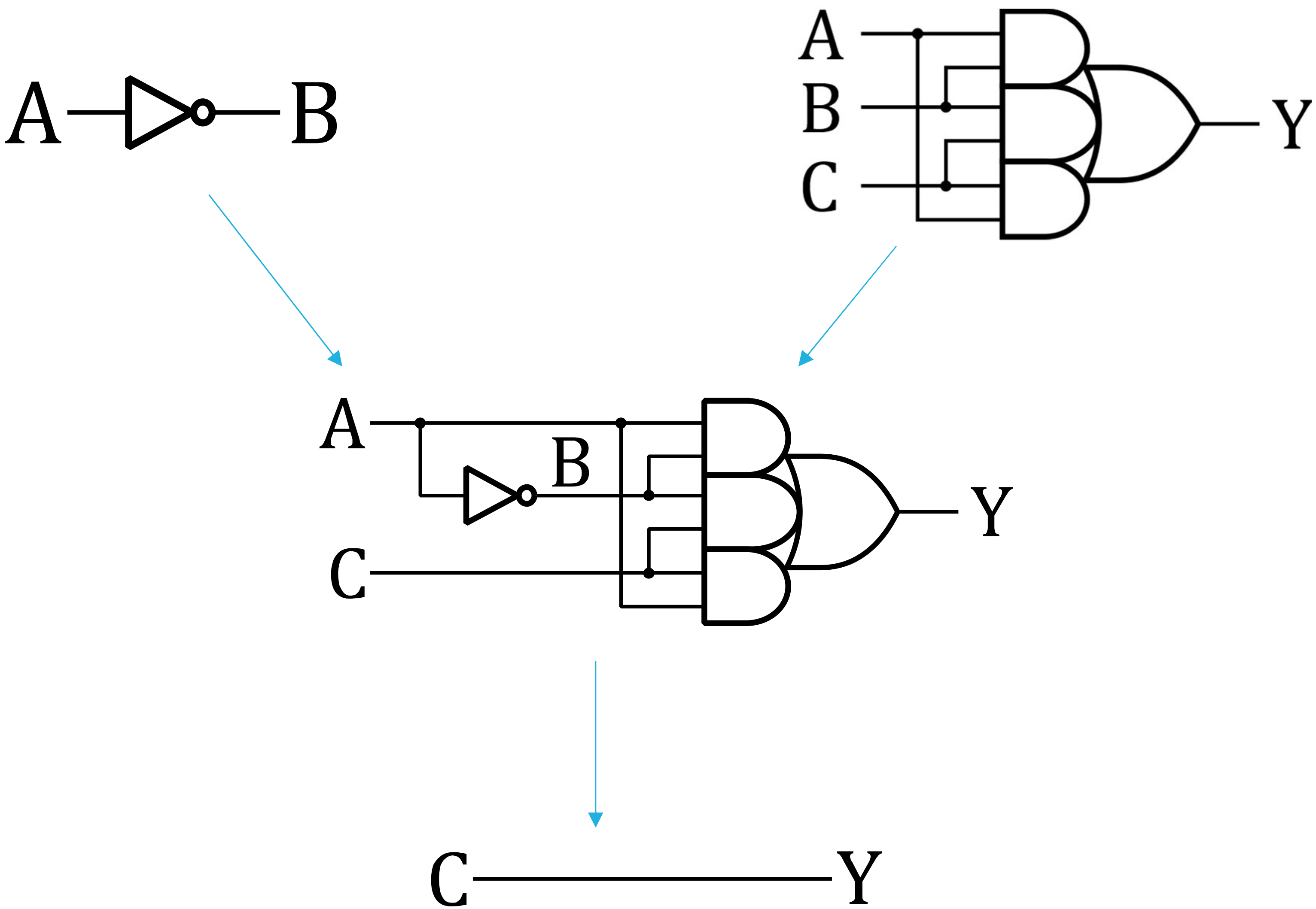
其中$d(\ldots)$为无关项。通过选择一些无关项：

$$Y = AB\overline{C} + ABC + AC + BC + \overline{A}\overline{B}C$$

$$Y = (AB + A + B + \overline{A}\overline{B})C$$

$$Y = C$$

# 约束条件和无关项示例



# 利用卡诺图化简无关项

投票电路：$Y = AB + AC + BC$

约束条件：$ABC + AB\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}\overline{C} = 0$

| | | BC | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 00 | 01 | 11 | 10 |
| A | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |

添加无关项

| | | BC | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 00 | 01 | 11 | 10 |
| A | 0 | x | x | 1 | 0 |
| | 1 | 0 | 1 | x | x |

$Y = C$

# 总结：考试范围

- 常见逻辑门
  - 与、或、非、与非、或非、异或、同或
  - 功能、逻辑符号、电路符号
- 基本逻辑运算
  - 带常数的运算
  - 基本定律
- 逻辑定理与化简
  - 三大定理：代入、反演、对偶
  - 范式：最小项、最大项、范式推导
  - 利用定理定律进行逻辑化简
  - 推导至特定门电路（与非/或非）
- 卡诺图
  - 利用卡诺图推到最小表达式
  - 利用卡诺图化简无关项

# 任何问题?

# 作业

第二章习题：

9，13，17(1-4)，18，20，21，26，27。

附一、给出下面逻辑表达式的最大项范式、最小项范式和**INF**范式。

$$Y=\overline{A}B(\overline{C}+D)+CD$$

附二、针对附一题中的的逻辑表达式，得到其：最简与或形式和最简或与形式。请注意，约束条件在不同最简形式时的使用。

约束条件：$BC\overline{D}+A\overline{C}D=0$

# 课堂习题

- 用与非门描述下面的逻辑函数

$$Y = A \oplus B \oplus C$$