

2021-2022学年秋季学期

第一部分 数制和码制

授课团队：宋威

助 教：薛子涵

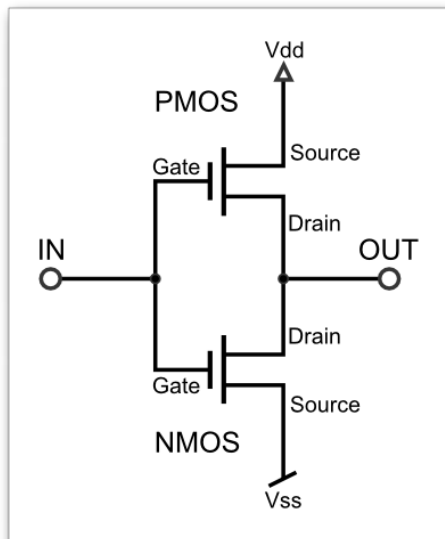
为何引入数制和码制

- 数字电路建立于二进制之上
 - 晶体管只能有效模仿开关电路，0/1状态
 - 晶体管特性的非线性
 - 只有0/1状态能被有效并低噪地表示
 - 开关电路，0/1状态的数学表现为二进制
- 人们的日常生活、基础数学建立在十进制之上
 - 人有10个手指，这其实是习惯
 - 习惯使用十、百、千、万等大数描述
- 数字电路的实际使用必须转换数制
 - 复杂数字电路完成二进制运算
 - 输入数据需要将十进制转换为二进制
 - 输出数据需要将二进制转换为十进制

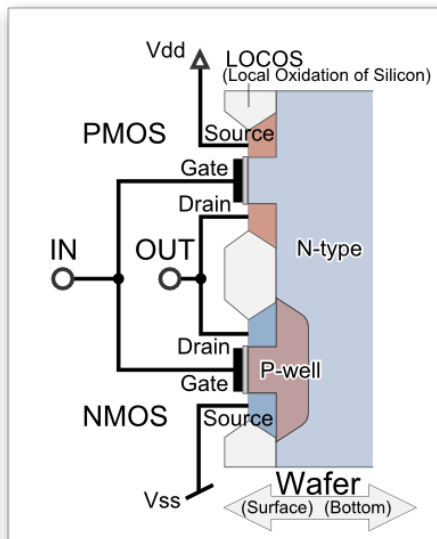
为什么数字电路建立于二进制之上

CMOS inverter

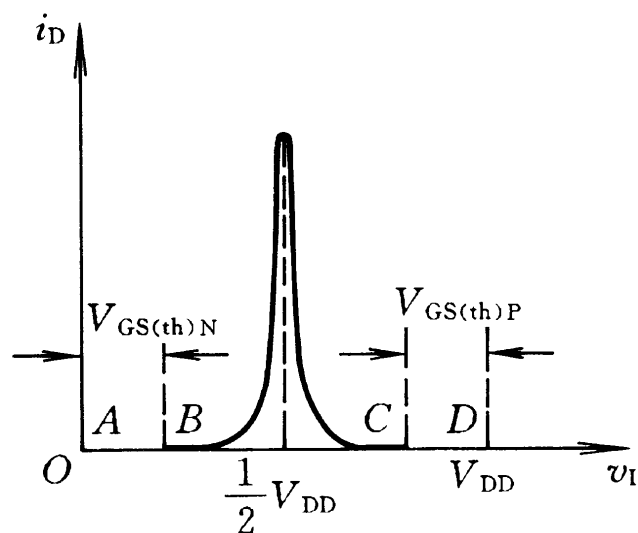
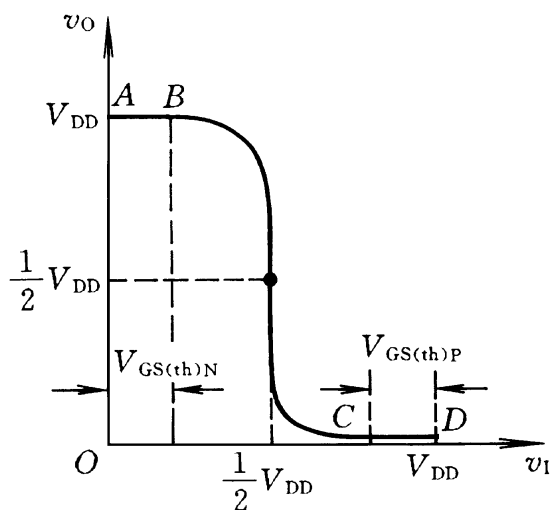
Model chart



Silicon wafer



饱和区
低电流



数制的基本概念

表示数时，仅用一位数码往往不够用，必须用进位计数的方法组成多位数码。多位数码每一位的构成以及从低位到高位进位规则称为进位计数制，简称数制。

○ 基数

- 进位制的基数，就是在该进位制中可能用到的数码个数。

○ 权数

- 在某一进位制的数中，每一位的大小都对应着该位上的数码乘上一个固定的数，这个固定的数就是这一位的权数。权数是一个幂。

○ 系数

- 每一位上的数，也是相应权数的系数

什么是数制：十进制自然数到N进制自然数

$$1997 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

$$1997 = [1 \quad 9 \quad 9 \quad 7] \cdot \begin{bmatrix} 10^3 \\ 10^2 \\ 10^1 \\ 10^0 \end{bmatrix}$$

$$D = \sum_{i=0}^{+\infty} k_i \times 10^i \quad 1997 = (1997)_{10}$$

十进制数是以**10**为基数**k**为系数的数字表述。

N进制数是以**N**为基数**k**为系数的数字表述。

$$D = \sum_{i=0}^{+\infty} k_i \times N^i = (k_{+\infty}, \dots, k_i, \dots k_0)_N$$

十进制正实数到N进制正实数

$$1997.75 = [1 \quad 9 \quad 9 \quad 7 \quad 7 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 10^3 \\ 10^2 \\ 10^1 \\ 10^0 \\ 10^{-1} \\ 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 10^i \quad 1997.75 = (1997.75)_{10}$$

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times N^i = (k_{+\infty}, \dots, k_i, \dots, k_{-\infty})_N$$

十进制正实数的定点表示(附加)

$$1997.53 = [1 \quad 9 \quad 9 \quad 7 \quad 7 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 10^3 \\ 10^2 \\ 10^1 \\ 10^0 \\ 10^{-1} \\ 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$199.753 = [1 \quad 9 \quad 9 \quad 7 \quad 7 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 10^2 \\ 10^3 \\ 10^0 \\ 10^{-1} \\ 10^{-2} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}$$

8位定点数(5,3):

$$19977.5 = \{19977500\}$$

$$1997.75 = \{01997750\}$$

$$199.775 = \{00199775\}$$

$$19.9775 = \{00019977\} \text{ 精度丢失! 需要浮点表示}$$

十进制正实数的浮点表示(附加)

8位定点数(5,3): 5位整数位, 3位小数位

$$19977.5 = \{19977500\}$$

$$1997.75 = \{01997750\}$$

$$199.775 = \{00199775\}$$

$$19.9775 = \{00019977\} \text{ 精度丢失! 需要浮点表示}$$

8位浮点数(1,7): 1位指数位, 7位小数位

$$19977.5 = \{60199775\} = 0.0199775 * 10^6$$

$$1997.75 = \{50199775\} = 0.0199775 * 10^5$$

$$199.775 = \{40199775\} = 0.0199775 * 10^4$$

$$19.9775 = \{30199775\} = 0.0199775 * 10^3$$

浮点表示并不唯一

$$19977.5 = \{51997750\} = 0.1997750 * 10^5$$



N进制正实数到二进制正实数

○N进制

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times N^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_{-\infty})_N$$

○二进制

D相同时，系数向量{k}并不相等。

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 2^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_{-\infty})_2$$

二进制数转十进制数

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 2^i = (k_{+\infty}, \dots, k_i, \dots k_{-\infty})_2$$

$$\begin{aligned} & (101110.11)_2 \\ &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} \\ &= 32 + 8 + 4 + 2 + 0.5 + 0.25 \\ &= 46.75 \end{aligned}$$

$$(11111001101.11)_2 = (1997.75)_{10}$$

十进制数转二进制数-公式展开

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 10^i = (k_{+\infty}, \dots, k_i, \dots k_{-\infty})_{10}$$

$(46)_{10}$

$= 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

$= 100 \times 1010^1 + 110 \times 1010^0$

$= ???$

用公式直接分解然后代入二进制运算并不方便!

十进制数转二进制数-基数连除、连乘法

整数部分:

基数连除,

取余数自下而上.

2	44	余数	低位
2	22	 0= K_0	
2	11	 0= K_1	
2	5	 1= K_2	
2	2	 1= K_3	
2	1	 0= K_4	
	0	 1= K_5	高位

小数部分:

基数连乘,

取整数自上而下.

0.375			
$\times 2$	整数	高位	
0.750	 0= K_{-1}		
0.750			
$\times 2$			
1.500	 1= K_{-2}		
0.500			
$\times 2$			
1.000	 1= K_{-3}	低位	

所以: $(44.375)_D = (101100.011)_B$

十进制数转二进制数-其他方法

快速手算

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

$$44 = 32 + 8 + 4 \quad 101100$$

$$75 = 64 + 8 + 3 \quad 1001011$$

$$31 = 32 - 1 \quad 100000 - 1 = 11111$$

计算器（程序员模式）

演示

转换精度损失(附加)

- 数制转换可能造成数据精度的损失，特别是对于小数部分

$$(1.3)_{10} = (1.01001100110011....)_2$$

- 原因

$$10 \neq 2^i$$

十进制和二进制的权数之间不能互相整除

十进制和二进制总结

- 为什么讨论二进制
 - 数字电路建立在开关电路之上
- 什么是数制
 - 基数、权数、系数
- 二进制到十进制的转换
 - 直接利用数制公式
- 十进制到二进制转换
 - 基数连除、连乘法
 - 手算、计算器
- 定点小数和浮点数（附加）
- 精度丢失问题（附加）

八进制和十六进制

○二进制 (bin)

$$B = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 2^i = (k_{+\infty}, \dots, k_i, \dots k_{-\infty})_2$$

○八进制 (oct)

$$O = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 8^i = (k_{+\infty}, \dots, k_i, \dots k_{-\infty})_8$$

○十六进制 (hex)

$$H = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 16^i = (k_{+\infty}, \dots, k_i, \dots k_{-\infty})_{16}$$

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
十六	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

八进制和十六进制转成十进制

○八进制 (oct)

$$(56)_8 = 5 \times 8^1 + 6 \times 8^0 = (46)_{10}$$

○十六进制 (hex)

$$(56)_{16} = 5 \times 16^1 + 6 \times 16^0 = (86)_{10}$$

$$(CF)_{16} = 12 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = (207)_{10}$$

十进制转成八进制和十六进制

○ 先转成二进制，再由二进制转八/十六进制

○ 八进制 (oct) : **3位二进制对1位八进制**

二进制	010	111	011	001
八进制	2	7	3	1

$$(010_111_011_001)_2 = (2731)_8$$

○ 十六进制 (hex) : **4位二进制对1位十六进制**

二进制	0101	1101	1001
八进制	5	D	9

$$(0101_1101_1001)_2 = (5D9)_{16}$$

八进制和十六进制总结

○为什么讨论八进制和十六进制

- 二进制表述系数向量太长，八进制和十六进制有效的缩短了表达长度
- 十六进制是现在计算机内存地址的标准表达方式
 - 1KB = 1024 Byte = 2^{10} Byte
 - 1MB = 1024 KB = 2^{20} Byte
 - 1GB = 1024 MB = 2^{30} Byte
 - 内存地址 0xFFF0_0844

○八/十六进制到十进制的转换

- 直接利用数制公式

○十进制到八/十六进制转换

- 先转换为二进制，然后按位转换

二进制的算术运算

○和十进制算数运算没有本质区别：逢二进一

加法运算

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ +\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0 \end{array}$$

减法运算

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1 \\ -\ 0\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 0\ 1\ 0\ 0 \end{array}$$

二进制的算术运算

○和十进制算数运算没有本质区别：**逢二进一**

乘法运算

$$\begin{array}{r} 1001 \\ \times 0101 \\ \hline 1001 \\ 0000 \\ 1001 \\ 0000 \\ \hline 0101101 \end{array}$$

除法运算

$$\begin{array}{r} 1.11\dots \\ 0101 \overline{)1001} \\ \underline{0101} \\ 1000 \\ \underline{0101} \\ 0110 \\ \underline{0101} \\ 0010 \end{array}$$

原码、补码和反码

○为什么引入原码、补码与反码

○表达负数并简化（统一）加减法运算

$$D = \sum_{i=0}^n k_i \times 2^i = (k_n, \dots, k_1, k_0)_2$$

○原码 (orig) : s为符号位

$$D_{orig} = (s, k_n, \dots, k_1, k_0)$$

○反码 (inv) : 正数时等于原码, 负数时

$$D_{inv} = (1, \bar{k}_n, \dots, \bar{k}_1, \bar{k}_0)$$

○补码 (comp) 2's complement code : 正数时等于原码, 负数时

$$D_{comp} = D_{inv} + 1$$

○引入补码后:

$$(A - B)_{comp} = A_{comp} + (-B)_{comp}$$

原码并不能正确处理负数加减法

- 当结果为正数时，添加符号位不影响结果

- $2 + 3 = 5$ $(0010)_2 + (0011)_2 = (0101)_2$

- $7 - 4 = 3$ $(0111)_2 - (0100)_2 = (0011)_2$

- 当减法结果为负数时，结果并不正确

- $4 - 7 = -3$ $(0100)_2 - (0111)_2 = (1101)_2 = (-5)_{10}$

- 当负数加正数时，结果也不正确

- $-2 + 3 = 1$ $(1010)_2 + (0011)_2 = (1101)_2 = (-5)_{10}$

利用补码解决负数计算问题

○当结果为正数时，原码和补码相等，结果仍然正确

○ $2 + 3 = 5$ $(0010)_2 + (0011)_2 = (0101)_2$

○ $7 - 4 = 3$ $(0111)_2 - (0100)_2 = (0011)_2$

○当减法结果为负数时，减数当作补码，变成加法，结果为正确的补码

○ $4 - 7 = -3$

○ $(-7)_{comp} = (-7)_{inv} + 1 = (1000)_2 + (0001)_2 = (1001)_2$

○ $(-3)_{comp} = (-3)_{inv} + 1 = (1100)_2 + (0001)_2 = (1101)_2$

○ $(0100)_2 + (1001)_2 = (1101)_2 = (-3)_{comp}$

○当负数加正数时，结果也正确

○ $-2 + 3 = 1$

○ $(-2)_{comp} = (-2)_{inv} + 1 = (1101)_2 + (0001)_2 = (1110)_2$

○ $(1110)_2 + (0011)_2 = (0001)_2 = (1)_{comp}$

补码计算的数学解释 (附加)

○对于负数来说

○ $d_{orig} + d_{inv} = M - 1$, 其中 $M = 2^n$, 也可以理解成符号位。

$$(-3)_{orig} + (-3)_{inv} = (1011)_2 + (1100)_2 = (0111)_2 = 7$$

○ $d_{comp} = d_{inv} + 1 = M - d_{orig}$ (不过我们这里暂时不考虑符号位)

$$○ (-d)_{comp} = (1, M - d)_2$$

○ 所以, 对于减法 $A - B$ (假设 A, B 都是正数)

$$(0, A)_2 + (1, M - B)_2 = (1, M + A - B)_2$$

○ 同理, 负数的加法 $-A + B$

$$(1, M - A)_2 + (0, B)_2 = (1, M + B - A)_2$$

补码到原码的转换 (附加)

因为：

$$d_{comp} = d_{inv} + 1 = M - d_{orig}$$

所以：

$$d_{comp} + d_{orig} = M$$

$$d_{orig} = M - d_{comp}$$

$$d_{orig} = (d_{comp})_{inv} + 1$$



二进制数学计算总结

- 利用原码直接计算

 - 逢二进一

- 原码、反码和补码

 - 引入符号位

 - 带符号位的原码计算不能处理负数

 - 利用补码处理负数，统一加法和减法

常见的编码形式

○我们只讲BCD码、格雷码和ASCII码

○BCD码： Binary Coded Decimal

- 用二进制编码来表示十进制数，电路系统中输出可读数据的主要方式。

○格雷码： Gray code

- 相邻码字之间的二进制码差为1
- 通讯：减小噪声、码间距（汉明距离）稳定

○ASCII码： American Standard Code for Information Interchange

- 将常见的英文/数字/符号用7(8)位二进制数表示的国际标准。
- 现在的操作系统中使用unicode（16位）表示多语言，是ASCII的超集

○其他的常见编码见教材

- 余3码、2421码、5211码

BCD编码

码字	编码
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

由0~9的二进制编码直接表示十进制，每4位二进制数代表一位十进制数：

$$(763)_{10} = (0111_0110_0011)_{BCD}$$

↓ ↓ ↓
7 6 3

Gray编码

码字	编码
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

相邻码字之间的码差只有一个比特。

如果用Gray码做计数器，可以避免漏码和插码。

从7到8，Gray码：

$$(0100)_{Gray} \rightarrow (1100)_{Gray}$$

二进制：

$$(0111)_2 \rightarrow (1011)_2 \rightarrow (1000)_2$$

$$(0111)_2 \rightarrow (0010)_2 \rightarrow (1000)_2$$

$$(0111)_2 \rightarrow (0000)_2 \rightarrow (1000)_2$$

但是，4位的Gray码当进位的时候不保持单一比特变化的特性！

$$(0000_1000)_{Gray} \rightarrow (0001_0000)_{Gray}$$

Gray码的特性只在一个码字内有效，多个码字同步仍然需要其他的办法。

ASCII码

Dec	Hex	Oct	Chr	Dec	Hex	Oct	HTML	Chr	Dec	Hex	Oct	HTML	Chr	Dec	Hex	Oct	HTML	Chr
0	0	000	NULL	32	20	040	 	Space	64	40	100	@	@	96	60	140	`	`
1	1	001	SoH	33	21	041	!	!	65	41	101	A	A	97	61	141	a	a
2	2	002	SoTxt	34	22	042	"	"	66	42	102	B	B	98	62	142	b	b
3	3	003	EoTxt	35	23	043	#	#	67	43	103	C	C	99	63	143	c	c
4	4	004	EoT	36	24	044	$	\$	68	44	104	D	D	100	64	144	d	d
5	5	005	Enq	37	25	045	%	%	69	45	105	E	E	101	65	145	e	e
6	6	006	Ack	38	26	046	&	&	70	46	106	F	F	102	66	146	f	f
7	7	007	Bell	39	27	047	'	'	71	47	107	G	G	103	67	147	g	g
8	8	010	Bsp	40	28	050	(	(	72	48	110	H	H	104	68	150	h	h
9	9	011	HTab	41	29	051	)	)	73	49	111	I	I	105	69	151	i	i
10	A	012	LFeed	42	2A	052	*	*	74	4A	112	J	J	106	6A	152	j	j
11	B	013	VTAB	43	2B	053	+	+	75	4B	113	K	K	107	6B	153	k	k
12	C	014	FFeed	44	2C	054	,	,	76	4C	114	L	L	108	6C	154	l	l
13	D	015	CR	45	2D	055	-	-	77	4D	115	M	M	109	6D	155	m	m
14	E	016	SOut	46	2E	056	.	.	78	4E	116	N	N	110	6E	156	n	n
15	F	017	SIn	47	2F	057	/	/	79	4F	117	O	O	111	6F	157	o	o
16	10	020	DLE	48	30	060	0	0	80	50	120	P	P	112	70	160	p	p
17	11	021	DC1	49	31	061	1	1	81	51	121	Q	Q	113	71	161	q	q
18	12	022	DC2	50	32	062	2	2	82	52	122	R	R	114	72	162	r	r
19	13	023	DC3	51	33	063	3	3	83	53	123	S	S	115	73	163	s	s
20	14	024	DC4	52	34	064	4	4	84	54	124	T	T	116	74	164	t	t
21	15	025	NAck	53	35	065	5	5	85	55	125	U	U	117	75	165	u	u
22	16	026	Syn	54	36	066	6	6	86	56	126	V	V	118	76	166	v	v
23	17	027	EoTB	55	37	067	7	7	87	57	127	W	W	119	77	167	w	w
24	18	030	Can	56	38	070	8	8	88	58	130	X	X	120	78	170	x	x
25	19	031	EoM	57	39	071	9	9	89	59	131	Y	Y	121	79	171	y	y
26	1A	032	Sub	58	3A	072	:	:	90	5A	132	Z	Z	122	7A	172	z	z
27	1B	033	Esc	59	3B	073	;	;	91	5B	133	[	[	123	7B	173	{	{
28	1C	034	FSep	60	3C	074	<	<	92	5C	134	\	\	124	7C	174	|	
29	1D	035	GSep	61	3D	075	=	=	93	5D	135	]	]	125	7D	175	}	}
30	1E	036	RSep	62	3E	076	>	>	94	5E	136	^	^	126	7E	176	~	~
31	1F	037	USep	63	3F	077	?	?	95	5F	137	_	_	127	7F	177		Del

charstable.com

字符串 “Hello world!”

```
0x00  6C6C6548  Hell
0x04  6F77206F  o wo
0x08  21646C72  rld!
0x0C  00000000
```

常见的编码形式总结

- BCD码
 - 十进制的二进制表现形式
- 格雷码
 - 编码距离的概念和用途
- ASCII码
 - 计算机系统中可见字符的编码

总结：考试范围

○数制

○数制的定义

○二进制

○二进制和十进制之间的互相转换

○八进制和十六进制

○二进制、八进制和十六进制之间的互相转换

○二进制计算

○二进制原码的加减乘除手算

○基于补码的二进制加减法

○编码

○十进制与BCD编码之间的转换

任何问题?

第一章习题：

4, 5, 6, 7, 12, 15。

○列出下列数字的8位二进制原码

31, 66, 125, 93

○列出下列数字的8位二进制补码

-66, -93

○使用8位二进制补码计算

31+125

66-93