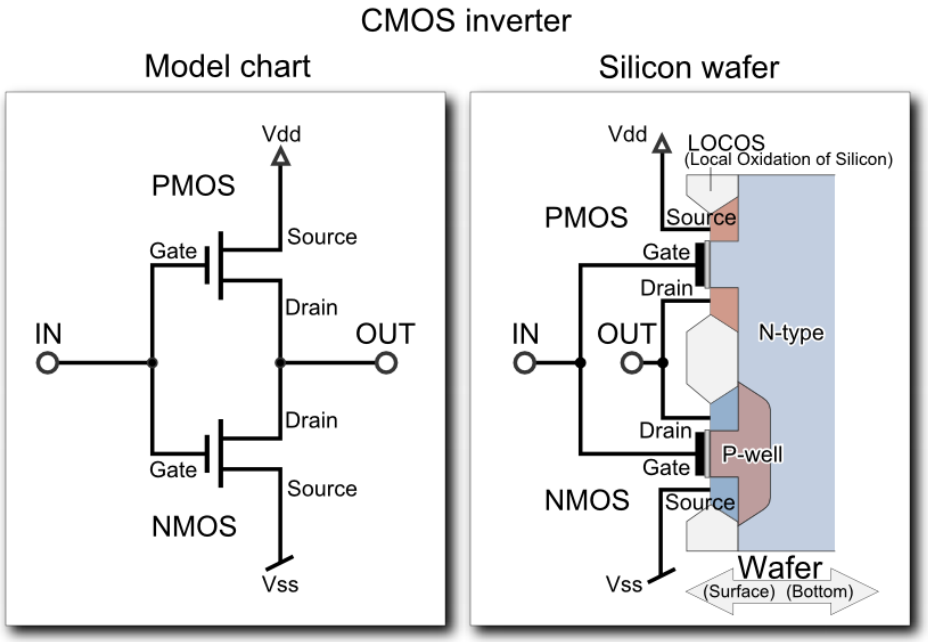
2019-2020学年秋季学期

第一部分
数制和码制

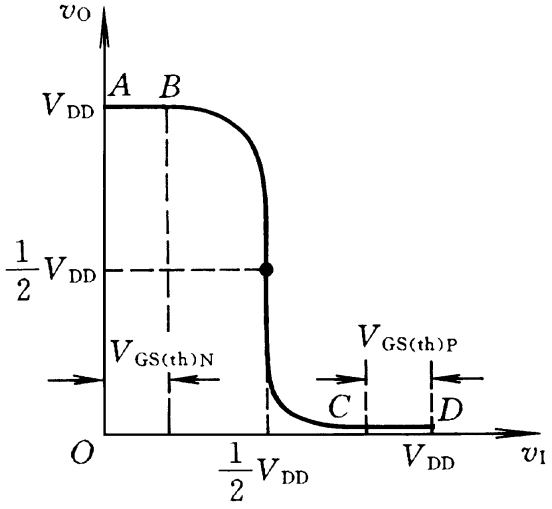
为何引入数制和码制

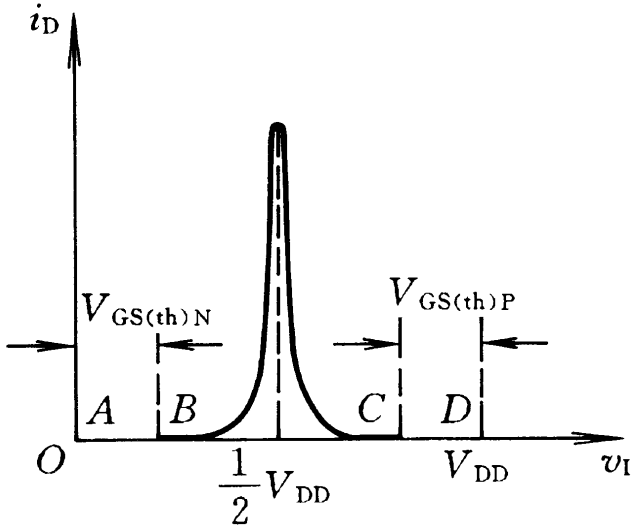
- 数字电路建立于二进制之上
  - 晶体管只能有效模仿开关电路，0/1状态
    - 晶体管特性的非线性
    - 只有0/1状态能被有效并低噪地表示
  - 开关电路，0/1状态的数学表现为二进制
- 人们的日常生活、基础数学建立在十进制之上
  - 人有10个手指，这其实是习惯
  - 习惯使用十、百、千、万等大数描述
- 数字电路的实际使用必须转换数制
  - 复杂数字电路完成二进制运算
  - 输入数据需要将十进制转换为二进制
  - 输出数据需要将二进制转换为十进制

为什么数字电路建立于二进制之上



饱和区
低电流





数制的基本概念

表示数时，仅用一位数码往往不够用，必须用进位计数的方法组成多位数码。多位数码每一位的构成以及从低位到高位的进位规则称为进位计数制，简称数制。

- 基数
  - 进位制的基数，就是在该进位制中可能用到的数码个数。
- 权数
  - 在某一进位制的数中，每一位的大小都对应着该位上的数码乘上一个固定的数，这个固定的数就是这一位的权数。权数是一个幂。
- 系数
  - 每一位上的数，也是相应权数的系数

什么是数制：十进制自然数到N进制自然数

$$1997 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

$$1997 = [1 \quad 9 \quad 9 \quad 7] \cdot \begin{bmatrix} 10^3 \\ 10^2 \\ 10^1 \\ 10^0 \end{bmatrix}$$

$$D = \sum_{i=0}^{+\infty} k_i \times 10^i \qquad 1997 = (1997)_{10}$$

十进制数是以10为基数k为系数的数字表述。

N进制数是以N为基数k为系数的数字表述。

$$D = \sum_{i=0}^{+\infty} k_i \times N^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_0)_N$$

十进制正实数到N进制正实数

$$1997.75 = [1 \quad 9 \quad 9 \quad 7 \quad 7 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 10^3 \\ 10^2 \\ 10^1 \\ 10^0 \\ 10^{-1} \\ 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 10^i \qquad 1997.75 = (1997.75)_{10}$$

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times N^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_{-\infty})_N$$

十进制正实数的定点表示(附加)

$$1997.53 = [1 \quad 9 \quad 9 \quad 7 \quad 7 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 10^3 \\ 10^2 \\ 10^1 \\ 10^0 \\ 10^{-1} \\ 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$199.753 = [1 \quad 9 \quad 9 \quad 7 \quad 7 \quad 5] \cdot \begin{bmatrix} 10^2 \\ 10^3 \\ 10^0 \\ 10^{-1} \\ 10^{-2} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}$$

8位定点数(5,3):

19977.5 = {19977500}

1997.75 = {01997750}

199.775 = {00199775}

19.9775 = {00019977} 精度丢失！需要浮点表示

十进制正实数的浮点表示(附加)

8位定点数(5,3)：5位整数位，3位小数位

19977.5 = {19977500}

1997.75 = {01997750}

199.775 = {00199775}

19.9775 = {00019977} 精度丢失！需要浮点表示

8位浮点数(1,7)：1位指数位，7位小数位

19977.5 = {60199775} = 0.0199775 * 10^6

1997.75 = {50199775} = 0.0199775 * 10^5

199.775 = {40199775} = 0.0199775 * 10^4

19.9775 = {30199775} = 0.0199775 * 10^3

浮点表示并不唯一

19977.5 = {51997750} = 0.1997750 * 10^5

N进制正实数到二进制正实数

- N进制

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times N^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_{-\infty})_N$$

- 二进制

D相同时，系数向量{k}并不相等。

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 2^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_{-\infty})_2$$

二进制数转十进制数

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 2^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_{-\infty})_2$$

$$(101110.11)_2$$
$$= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2}$$
$$= 32 + 8 + 4 + 2 + 0.5 + 0.25$$
$$= 46.75$$

$$(11111001101.11)_2 = (1997.75)_{10}$$

十进制数转二进制数-公式展开

$$D = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 10^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_{-\infty})_{10}$$

$$(46)_{10}$$
$$= 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$
$$= 100 \times 1010^1 + 110 \times 1010^0$$
$$= ???$$

用公式直接分解然后代入二级制运算并不方便!

十进制数转二进制数-基数连除、连乘法

整数部分：

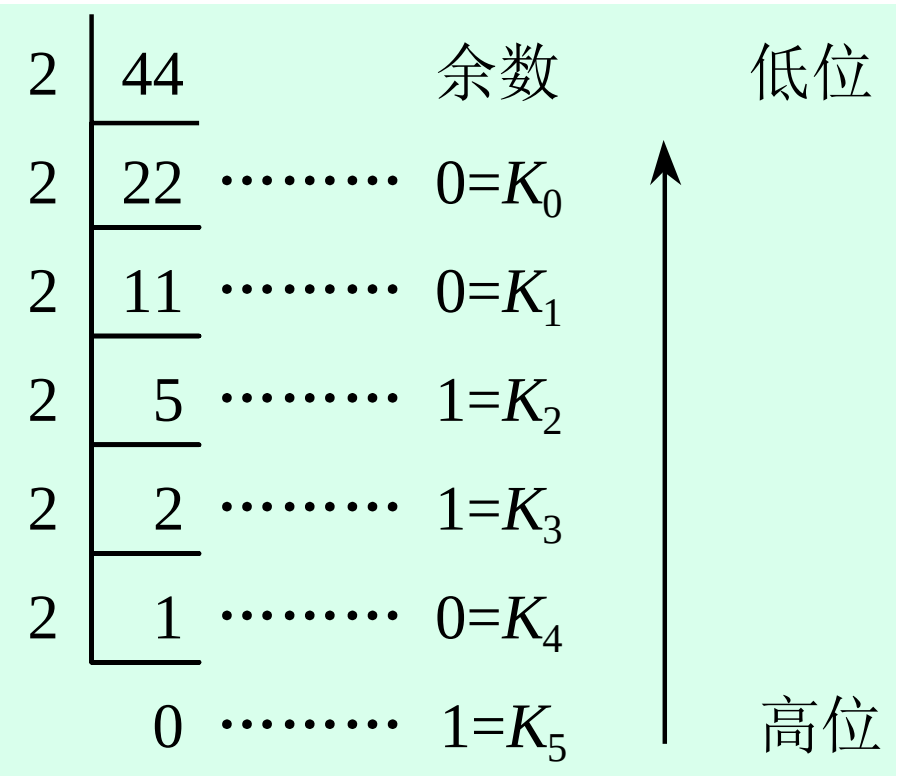
基数连除，

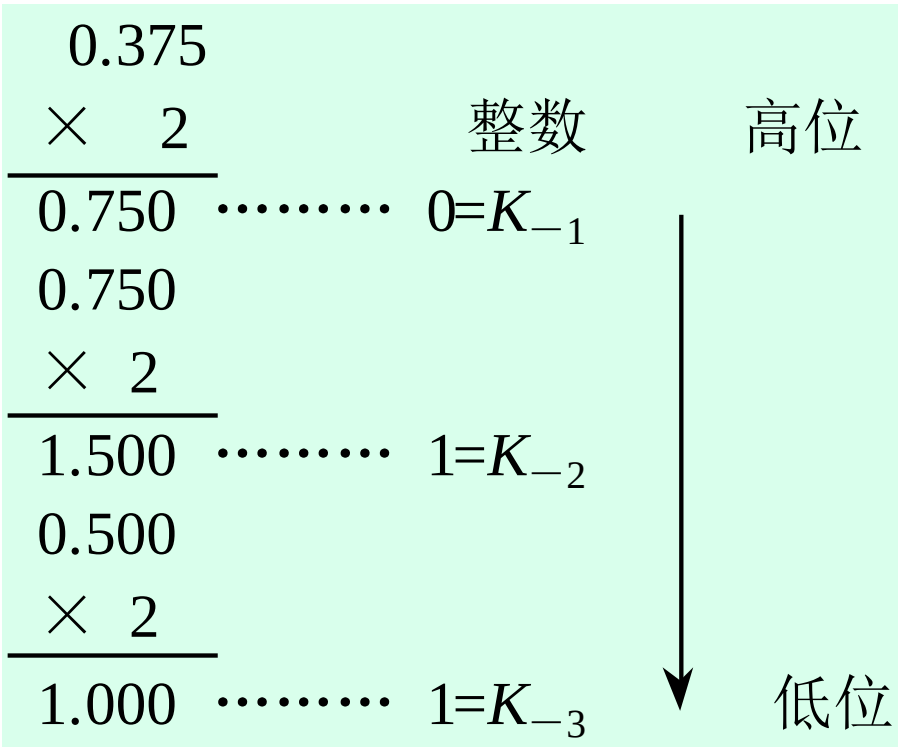
取余数自下而上.

小数部分：

基数连乘，

取整数自上而下.





所以：$(44.375)_D = (101100.011)_B$

十进制数转二进制数-其他方法

快速手算

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

44 = 32+8+4　101100

75 = 64+8+3　1001011

31 = 32 – 1　100000 – 1 = 11111

计算器（程序员模式）

演示

转换精度损失(附加)

- 数制转换可能造成数据精度的损失，特别是对于小数部分

$(1.3)_{10} = (1.01001100110011....)_2$

- 原因

$$10 \neq 2^i$$

十进制和二进制的权数之间不能互相整除

十进制和二进制总结

- 为什么讨论二进制
  - 数字电路建立在开关电路之上
- 什么是数制
  - 基数、权数、系数
- 二进制到十进制的转换
  - 直接利用数制公式
- 十进制到二进制转换
  - 基数连除、连乘法
  - 手算、计算器
- 定点小数和浮点数（附加）
- 精度丢失问题（附加）

八进制和十六进制

- 二进制（bin）

$$B = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 2^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_{-\infty})_2$$

- 八进制（oct）

$$O = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 8^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_{-\infty})_8$$

- 十六进制（hex）

$$H = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} k_i \times 16^i = (k_{+\infty}, \cdots, k_i, \cdots k_{-\infty})_{16}$$

十	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
十六	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

八进制和十六进制转成十进制

- 八进制（oct）

$$(56)_8 = 5 \times 8^1 + 6 \times 8^0 = (46)_{10}$$

- 十六进制（hex）

$$(56)_{16} = 5 \times 16^1 + 6 \times 16^0 = (86)_{10}$$

$$(CF)_{16} = 12 \times 16^1 + 15 \times 16^0 = (207)_{10}$$

十进制转成八进制和十六进制

- 先转成二进制，再由二进制转八/十六进制

- 八进制（oct）：**3位二进制对1位八进制**

二进制	010	111	011	001
八进制	4	7	3	1

$$(010\_111\_011\_001)_2 = (4731)_8$$

- 十六进制（hex）：**4位二进制对1位十六进制**

二进制	0101	1101	1001
八进制	5	D	9

$$(0101\_1101\_1001)_2 = (5D9)_{16}$$

八进制和十六进制总结

- 为什么讨论八进制和十六进制
  - 二进制表述系数向量太长，八进制和十六进制有效的缩短了表达长度
  - 十六进制是现在计算机内存地址的标准表达方式
    - 1KB = 1024 Byte = 2^{10} Byte
    - 1MB = 1024 KB = 2^{20} Byte
    - 1GB = 1024 MB = 2^{30} Byte
    - 内存地址 0xFFF0_0844
- 八/十六进制到十进制的转换
  - 直接利用数制公式
- 十进制到八/十六进制转换
  - 先转换为二进制，然后按位转换

二进制的算术运算

- 和十进制算数运算没有本质区别：**逢二进一**

加法运算

```
  1 0 0 1
+ 0 1 0 1
---------
  1 1 1 0
```

减法运算

```
  1 0 0 1
- 0 1 0 1
---------
  0 1 0 0
```

二进制的算术运算

- 和十进制算数运算没有本质区别：**逢二进一**

乘法运算

```
      1 0 0 1
    × 0 1 0 1
  ---------
      1 0 0 1
    0 0 0 0
  1 0 0 1
0 0 0 0
---------------
0 1 0 1 1 0 1
```

除法运算

```
          1.1 1...
        ---------
0101 ) 1 0 0 1
       0 1 0 1
       ---------
         1 0 0 0
         0 1 0 1
         ---------
           0 1 1 0
           0 1 0 1
           ---------
             0 0 1 0
```

原码、补码和反码

- 为什么引入原码、补码与反码
  - 表达负数并简化（统一）加减法运算

$$D = \sum_{i=0}^{n} k_i \times 2^i = (k_n, \ldots, k_1, k_0)_2$$

- 原码（orig）：s为符号位

$$D_{orig} = (s, k_n, \ldots, k_1, k_0)$$

- 反码（inv）：正数时等于原码，负数时

$$D_{inv} = \left(1, \overline{k}_n, \ldots, \overline{k}_1, \overline{k}_0\right)$$

- 补码（comp）2’s complement code：正数时等于原码，负数时

$$D_{comp} = D_{inv} + 1$$

- 引入补码后：

$$(A - B)_{comp} = A_{comp} + (-B)_{comp}$$

原码并不能正确处理负数加减法

- 对于正数，添加符号位不影响结果
  - $2+3=5$ $(0010)_2+(0011)_2=(0101)_2$
  - $7-4=3$ $(0111)_2-(0100)_2=(0011)_2$
- 当减法结果为负数时，结果并不正确
  - $4-7=-3$ $(0100)_2-(0111)_2=(1101)_2=(-5)_{10}$
- 当负数加正数时，结果也不正确
  - $-2+3=1$ $(1010)_2+(0011)_2=(1101)_2=(-5)_{10}$

利用补码解决负数计算问题

- 对于正数，原码和补码相等，结果仍然正确
  - $2+3=5$　　$(0010)_2+(0011)_2=(0101)_2$
  - $7-4=3$　　$(0111)_2-(0100)_2=(0011)_2$
- 当减法结果为负数时，减数当作补码，变成加法，结果为正确的补码
  - $4-7=-3$
  - $(-7)_{comp}=(-7)_{inv}+1=(1000)_2+(0001)_2=(1001)_2$
  - $(-3)_{comp}=(-3)_{inv}+1=(1100)_2+(0001)_2=(1101)_2$
  - $(0100)_2+(1001)_2=(1101)_2=(-3)_{comp}$
- 当负数加正数时，结果也正确
  - $-2+3=1$
  - $(-2)_{comp}=(-2)_{inv}+1=(1101)_2+(0001)_2=(1110)_2$
  - $(1110)_2+(0011)_2=(0001)_2=(1)_{comp}$

补码计算的数学解释（附加）

- 对于负数来说
  - $d_{orig} + d_{inv} = M - 1$, 其中$M = 2^n$，也可以理解成符号位。
    $(-3)_{orig} + (-3)_{inv} = (1011)_2 + (1100)_2 = (0111)_2 = 7$
  - $d_{comp} = d_{inv} + 1 = M - d_{orig}$ (不过我们这里暂时不考虑符号位)
  - $(-d)_{comp} = (1, M - d)_2$

- 所以，对于减法$A - B$(假设A, B都是正数)

$$(0, A)_2 + (1, M - B)_2 = (1, M + A - B)_2$$

- 同理，负数的加法 $-A + B$

$$(1, M - A)_2 + (0, B)_2 = (1, M + B - A)_2$$

补码到原码的转换（附加）

因为：

$$d_{comp} = d_{inv} + 1 = M - d_{orig}$$

所以：

$$d_{comp} + d_{orig} = M$$
$$d_{orig} = M - d_{comp}$$
$$d_{orig} = (d_{comp})_{inv} + 1$$

二进制数学计算总结

- 利用原码直接计算
  - 逢二进一
- 原码、反码和补码
  - 引入符号位
  - 带符号位的原码计算不能处理负数
  - 利用补码处理负数，统一加法和减法

常见的编码形式

- 我们只讲BCD码、格雷码和ASCII码
  - BCD码：Binary Coded Decimal
    - 用二进制编码来表示十进制数，电路系统中输出可读数据的主要方式。
  - 格雷码：Gray code
    - 相邻码字之间的二进制码差为1
    - 通讯：减小噪声、码间距（汉明距离）稳定
  - ASCII码：American Standard Code for Information Interchange
    - 将常见的英文/数字/符号用7(8)位二进制数表示的国际标准。
    - 现在的操作系统中使用unicode（16位）表示多语言，是ASCII的超集
- 其他的常见编码见教材
  - 余3码、2421码、5211码

BCD编码

码字	编码
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

由0~9的二进制编码直接表示十进制，每4位二进制数代表一位十进制数：

$$(763)_{10} = (0111\_0110\_0011)_{BCD}$$

7 6 3

Gray编码

码字	编码
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

相邻码字之间的码差只有一个比特。

如果用Gray码做计数器，可以避免漏码和插码。

从7到8，Gray码：

$$(0100)_{Gray} \rightarrow (1100)_{Gray}$$

二进制：

$$(0111)_2 \rightarrow (1011)_2 \rightarrow (1000)_2$$
$$(0111)_2 \rightarrow (0010)_2 \rightarrow (1000)_2$$
$$(0111)_2 \rightarrow (0000)_2 \rightarrow (1000)_2$$

但是，4位的Gray码当进位的时候不保持单一比特变化的特性！

$$(0000\_1000)_{Gray} \rightarrow (0001\_0000)_{Gray}$$

Gray码的特性只在一个码字内有效，多个码字同步仍然需要其他的办法。

ASCII码

Dec	Hex	Oct	Chr	Dec	Hex	Oct	HTML	Chr	Dec	Hex	Oct	HTML	Chr	Dec	Hex	Oct	HTML	Chr
0	0	000	NULL	32	20	040	&#032;	Space	64	40	100	&#064;	@	96	60	140	&#096;	`
1	1	001	SoH	33	21	041	&#033;	!	65	41	101	&#065;	A	97	61	141	&#097;	a
2	2	002	SoTxt	34	22	042	&#034;	"	66	42	102	&#066;	B	98	62	142	&#098;	b
3	3	003	EoTxt	35	23	043	&#035;	#	67	43	103	&#067;	C	99	63	143	&#099;	c
4	4	004	EoT	36	24	044	&#036;	$	68	44	104	&#068;	D	100	64	144	&#100;	d
5	5	005	Enq	37	25	045	&#037;	%	69	45	105	&#069;	E	101	65	145	&#101;	e
6	6	006	Ack	38	26	046	&#038;	&	70	46	106	&#070;	F	102	66	146	&#102;	f
7	7	007	Bell	39	27	047	&#039;	'	71	47	107	&#071;	G	103	67	147	&#103;	g
8	8	010	Bsp	40	28	050	&#040;	(	72	48	110	&#072;	H	104	68	150	&#104;	h
9	9	011	HTab	41	29	051	&#041;	)	73	49	111	&#073;	I	105	69	151	&#105;	i
10	A	012	LFeed	42	2A	052	&#042;	*	74	4A	112	&#074;	J	106	6A	152	&#106;	j
11	B	013	VTab	43	2B	053	&#043;	+	75	4B	113	&#075;	K	107	6B	153	&#107;	k
12	C	014	FFeed	44	2C	054	&#044;	,	76	4C	114	&#076;	L	108	6C	154	&#108;	l
13	D	015	CR	45	2D	055	&#045;	-	77	4D	115	&#077;	M	109	6D	155	&#109;	m
14	E	016	SOut	46	2E	056	&#046;	.	78	4E	116	&#078;	N	110	6E	156	&#110;	n
15	F	017	SIn	47	2F	057	&#047;	/	79	4F	117	&#079;	O	111	6F	157	&#111;	o
16	10	020	DLE	48	30	060	&#048;	0	80	50	120	&#080;	P	112	70	160	&#112;	p
17	11	021	DC1	49	31	061	&#049;	1	81	51	121	&#081;	Q	113	71	161	&#113;	q
18	12	022	DC2	50	32	062	&#050;	2	82	52	122	&#082;	R	114	72	162	&#114;	r
19	13	023	DC3	51	33	063	&#051;	3	83	53	123	&#083;	S	115	73	163	&#115;	s
20	14	024	DC4	52	34	064	&#052;	4	84	54	124	&#084;	T	116	74	164	&#116;	t
21	15	025	NAck	53	35	065	&#053;	5	85	55	125	&#085;	U	117	75	165	&#117;	u
22	16	026	Syn	54	36	066	&#054;	6	86	56	126	&#086;	V	118	76	166	&#118;	v
23	17	027	EoTB	55	37	067	&#055;	7	87	57	127	&#087;	W	119	77	167	&#119;	w
24	18	030	Can	56	38	070	&#056;	8	88	58	130	&#088;	X	120	78	170	&#120;	x
25	19	031	EoM	57	39	071	&#057;	9	89	59	131	&#089;	Y	121	79	171	&#121;	y
26	1A	032	Sub	58	3A	072	&#058;	:	90	5A	132	&#090;	Z	122	7A	172	&#122;	z
27	1B	033	Esc	59	3B	073	&#059;	;	91	5B	133	&#091;	[	123	7B	173	&#123;	{
28	1C	034	FSep	60	3C	074	&#060;	<	92	5C	134	&#092;	\	124	7C	174	&#124;	|
29	1D	035	GSep	61	3D	075	&#061;	=	93	5D	135	&#093;	]	125	7D	175	&#125;	}
30	1E	036	RSep	62	3E	076	&#062;	>	94	5E	136	&#094;	^	126	7E	176	&#126;	~
31	1F	037	USep	63	3F	077	&#063;	?	95	5F	137	&#095;	_	127	7F	177	&#127;	Del

charstable.com

字符串“Hello world!”

```
0x00   6C6C6548   Hell
0x04   6F77206F   o wo
0x08   21646C72   rld!
0x0C   00000000
```

常见的编码形式总结

- BCD码
  - 十进制的二进制表现形式
- 格雷码
  - 编码距离的概念和用途
- ASCII码
  - 计算机系统中可见字符的编码

总结：考试范围

- 数制
  - 数制的定义
- 二进制
  - 二进制和十进制之间的互相转换
- 八进制和十六进制
  - 二进制、八进制和十六进制之间的互相转换
- 二进制计算
  - 二进制原码的加减乘除手算
  - 基于补码的二进制加减法
- 编码
  - 十进制与BCD编码之间的转换

任何问题？

作业

第一章习题：

4，5，6，7，12，15。

课堂习题

- 列出下列数字的8位二进制原码

  31，66，125，93

- 列出下列数字的8位二进制补码

  -66，-93

- 使用8位二进制补码计算

  31+125

  66-93